

1) **Теоретический вопрос.** Теплопроводность твердых тел. Закон Фурье. Вывод уравнения трехмерной теплопроводности.

2) Решить методом Фурье:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = -10. \end{cases}$$

3) В круге  $x^2 + y^2 < 9$  найти гармоническую функцию  $u = u(x, y)$ , если

$$u|_{x^2+y^2=9} = x^2 - 3.$$

4) Задача математической физики в полуполосе  $0 < x < 5, t > 0$  имеет элементарное решение  $u(x, t) = e^{-11(7\pi/5)^2 t} \cos(7\pi x/5)$ . Дать общую постановку такой задачи и указать её физический смысл.

1) **Теоретический вопрос.** Канонические координаты и специальный канонический вид для уравнения колебаний струны. Общее решение уравнения колебаний. Характеристики. Интерпретация общего решения, как суммы прямой и обратной волн.

2) Решить методом Фурье:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} - u, & 0 < x < 6, & t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & u_x(6, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3 - x. \end{cases}$$

3) В шаре  $0 \leq r \leq 2$  пространства  $\mathbb{R}^6$  решить задачу Дирихле  $u(2) = 0$  для уравнения Пуассона  $\Delta u = -10$ .

4) Задача математической физики в полуполосе  $0 < x < 1, t > 0$  имеет элементарное решение  $u(x, t) = \sin(12\pi t) \sin(3\pi x)$ . Дать общую постановку такой задачи и указать её физический смысл.

1) **Теоретический вопрос.** Одномерное преобразование Фурье и его элементарные свойства. Преобразование Фурье от производной. Интеграл типа Эйлера–Пуассона.

2) Решить методом Фурье:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = -x. \end{cases}$$

3) В круговом кольце  $1/4 < x^2 + y^2 < 4$  найти гармоническую функцию  $u = u(x, y)$ , если

$$u|_{x^2+y^2=1/4} = x, \quad u|_{x^2+y^2=4} = y.$$

4) Для задачи теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} - x^2, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \end{cases}$$

указать предельное значение  $u(x, t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Объяснить физический смысл найденной предельной функции  $w(x) \equiv u^{(\infty)}(x)$ .